

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: 19020120153824

UDC_____

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

几类粗糙核积分算子的有界性

Boundedness of Certain Integral Operators with Rough
Kernels

张代清

指导教师姓名: 伍 火 熊 教授

专 业 名 称: 基 础 数 学

论文提交日期: 2015 年 月

论文答辩时间: 2015 年 月

学位授予日期: 2015 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2015 年 月

Doctoral Dissertation

Boundedness of Certain Integral Operators with Rough Kernels

Supervisor: Huoxiong Wu
Speciality: Fundamental Mathematics
Institution: School of Mathematical Sciences
Xiamen University
Xiamen, P.R. China

2015

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

☐ 1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

☐ 2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

几类粗糙核积分算子的有界性

摘 要

本学位论文研究沿低维集的粗糙核 Marcinkiewicz 积分算子、多参数奇异积分算子以及多线性奇异积分算子及其交换子的有界性. 全文共分七章:

第一章概述本文所研究问题的背景以及国内外研究现状, 并简单介绍本文的主要结果与结构安排.

第二章讨论当积分核满足 $\Omega \in \mathcal{F}_\beta(S^{n-1})$ ($n \geq 2$) 时, 沿多项式复合子流形的抛物型 Marcinkiewicz 积分算子的 L^p 有界性, 这些结果本质上改进和推广了一些已有的结果. 并在主要结果的证明过程中给出了一个系统的处理方法.

第三章考虑带径向粗糙核的沿多项式复合曲线的 Marcinkiewicz 积分算子. 利用外插的方法, 在核函数满足 $\Omega \in L(\log^+ L)^{1/2}(S^{n-1})$ 且 $h \in \mathcal{N}_{1/2}(\mathbb{R}^+)$, 或 $\Omega \in L(\log^+ L)(S^{n-1})$ 且 $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$ 条件下, 建立了其 L^p 有界性.

第四章研究带径向粗糙核沿有限型子流形的 Marcinkiewicz 积分算子. 借助于外插讨论, 在积分核满足 $h \in \Lambda_1^\eta(\mathbb{R}^+)$ 及 $\Omega \in L(\log^+ L)^\alpha(S^{n-1})$ 或 $B_q^{(0, \alpha-1)}(S^{n-1})$ ($\alpha = 1/2$ 或 1) 的条件下, 建立了其 L^p 有界性. 这些结果本质上改进和推广了一些已有的结果.

第五章讨论沿齐性映射的多参数奇异积分算子. 在核函数满足 $h \in \Delta_\gamma$ 和 $\Omega \in L(\log^+ L)^2(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 时, 给出了乘积域上沿齐性映射的奇异积分算子及其相应的极大算子的 L^p 有界性.

第六章研究乘积域上沿有限型子流形的奇异积分算子. 通过 Fourier 变换估计和外插方法的讨论, 我们证明了沿有限型子流形的带径向粗糙核奇异积分算子在 L^p 空间上的有界性.

第七章讨论多线性奇异积分算子及其交换子在加权共合空间上的有界性, 给出了几个有界性判据. 作为应用, 获得了多线性 Calderón-Zygmund 算子和非光滑核的多线性 Calderón-Zygmund 奇异积分算子及其交换子在 $(L_{v_{\vec{w}}}^q, L^p)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间上的有界性.

关键词：Marcinkiewicz 积分算子；多参数奇异积分算子；多线性算子；交换子；低维集；粗糙核；有界性.

厦门大学博硕士论文摘要库

Boundedness of Certain Integral Operators with Rough Kernels

ABSTRACT

This thesis is devoted to studying the L^p bounds for rough Marcinkiewicz integrals and multiple singular integrals associated to certain lower-dimensional sets and the boundedness of multilinear singular integrals and commutators. It consists of seven chapters as follows.

In Chapter 1, we firstly give a brief review of the background of the related problems and state our main results. We also give the structure of this paper.

In Chapter 2, we show the L^p boundedness of parabolic Marcinkiewicz integral operators along polynomials compound submanifolds for $\Omega \in \mathcal{F}_\beta(S^{n-1})$ ($n \geq 2$) with some $\beta > 0$. These results extend and improve some previous results. The main ingredient is to present a systematic treatment with several Marcinkiewicz integral operators.

In Chapter 3, our target is to establish the L^p boundedness of Marcinkiewicz integrals associated to polynomial compound curves with rough kernels both in the radial direction and on the unit sphere provided that $\Omega \in L(\log^+ L)^{1/2}(S^{n-1})$ and $h \in \mathcal{N}_{1/2}(\mathbb{R}^+)$, or $\Omega \in L(\log^+ L)(S^{n-1})$ and $h \in \mathcal{N}_1(\mathbb{R}^+)$ via extrapolation.

In Chapter 4, we obtain the L^p boundedness of Marcinkiewicz integrals associated to submanifolds of finite type for $h \in \Lambda_1^\eta(\mathbb{R}^+)$ and $\Omega \in L(\log^+ L)^\alpha(S^{n-1})$ or $B_q^{(0, \alpha-1)}(S^{n-1})$ with $\alpha = 1/2$ or 1 .

The purpose of Chapter 5 is to discuss multiple singular integrals and the related maximal operators associated to homogeneous mappings on L^p spaces. We prove boundedness of the such operators with $h \in \Delta_\gamma$ and $\Omega \in L(\log^+ L)^2(S^{m-1} \times S^{n-1})$.

In Chapter 6, we consider the singular integrals associated with submanifolds of finite type on product domains. By the delicate Fourier transform estimates and the

extrapolation arguments, we obtain the L^p boundedness for such operators with rough kernels both in the radial direction and on the unit sphere.

Chapter 7 is concerned with the norm estimates for the multilinear singular integral operators and their commutators formed by BMO functions on the weighted amalgam spaces $(L^q_{v_{\vec{w}}}, L^p)^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Some criteria of boundedness for such operators in $(L^q_{v_{\vec{w}}}, L^p)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ are given. As applications, the norm inequalities for the multilinear Calderón-Zygmund operators and multilinear singular integrals with non-smooth kernels as well as the corresponding commutators on $(L^q_{v_{\vec{w}}}, L^p)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ are obtained.

Key Words: Marcinkiewicz integrals; multiple singular integrals; multilinear operators; commutators; lower-dimensional sets; rough kernels; boundedness.

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第一章 绪 论	1
1.1 研究背景及研究现状	1
1.2 本文的主要结果	10
1.3 本文的记号	17
1.4 结构安排	17
第二章 沿多项式复合子流形的抛物型 Marcinkiewicz 积分算子的 有界性	19
2.1 主要结果	19
2.2 辅助引理	22
2.3 主要结果的证明	27
第三章 沿多项式复合曲线的抛物型 Marcinkiewicz 积分的 L^p 有界 性与外插	34
3.1 主要结果	34
3.2 记号与引理	36

3.3 主要结果的证明	45
第四章 沿有限型子流形的 Marcinkiewicz 积分的 L^p 有界性与外插 ..	50
4.1 主要结果	50
4.2 记号与辅助引理	52
4.3 主要结果的证明	64
第五章 乘积域上沿齐性映射的奇异积分算子的 L^p 有界性	69
5.1 主要结果与一些记号	69
5.2 辅助引理	73
5.3 定理的证明	86
第六章 乘积域上沿有限型子流形的奇异积分算子的 L^p 有界性与 外插	93
6.1 引言与主要结果	93
6.2 辅助引理	94
6.3 极大函数估计	97
6.4 定理的证明	103
第七章 多线性奇异积分算子及其交换子在加权共和空间上的有 界性	106
7.1 引言与主要结果	106
7.2 主要结果的证明	112

7.3 主要结果的应用	120
参考文献	125
攻读博士学位期间完成的学术论文	135
致 谢	137

CONTENTS

Abstract (in Chinese)	I
Abstract (in English)	III
Chapter 1 Introduction	1
§1.1 Background	1
§1.2 Main results	10
§1.3 Notations	17
§1.4 Outline	17
Chapter 2 L^p bounds for parabolic Marcinkiewicz integrals associated to polynomial compound submanifolds	19
§2.1 Main results	19
§2.2 Preliminaries	22
§2.3 The proofs of main results	27
Chapter 3 L^p bounds for Marcinkiewicz integrals associated to polynomial compound curves and extrapolation	34
§3.1 Main results	34
§3.2 Some notations and lemmas	36
§3.3 The proofs of main results	45
Chapter 4 L^p bounds for Marcinkiewicz integrals along	

submanifolds of finite type and extrapolation.....	50
§4.1 Main results	50
§4.2 Some notations and preliminaries	52
§4.3 The proofs of main results	64
Chapter 5 L^p-boundedness of multiple singular integrals associated to homogeneous mappings.....	69
§5.1 Main results and some notatiols	69
§5.2 Preliminaries.....	73
§5.3 The proofs of main results	86
Chapter 6 L^p-boundedness of multiple singular integrals along submanifolds of finite type and extrapolation	93
§6.1 Main results and some notatiols	93
§6.2 Preliminaries.....	94
§6.3 Maximal functions	97
§6.4 The proofs of theorems	103
Chapter 7 Boundedness of the multilinear singular integrals and commutators in the weighted amalgam spaces.....	106
§7.1 Introduction and main results	106
§7.2 The proofs of main results	112
§7.3 Applications	120
Bibliography	125

CONTENTS

Academic achievements	135
Acknowledgements	137

厦门大学博硕士论文摘要库

第一章 绪 论

§ 1.1 研究背景及研究现状

调和分析是现代数学的一个重要组成部分, 调和分析的思想、方法和技巧在偏微分方程、复分析、几何分析、非线性分析、表示论、解析数论、小波分析等众多数学领域和信息科学, 石油勘探, 医学等应用领域中有广泛应用。国际数学家联盟前主席 L. Carleson 教授 (1992 年 Wolf 数学奖和 2006 年 Abel 奖获得者) 曾指出: “调和分析在数学中的地位相当于原子理论在物理学中的地位”。

作为调和分析中心内容之一的奇异积分理论是偏微分方程、复分析等领域的重要研究工具, 其研究一直受到调和分析学者的广泛关注. 1952年, Calderón 和 Zygmund 在文 [32] 中研究椭圆型偏微分方程时引入奇异积分的概念, 并证明了其存在性. 随后, 在文 [33] 中他们研究了一类卷积型奇异积分算子, 并在核满足一定正则条件下证明了其 L^p 有界性. 自此, 以 Calderón-Zygmund 奇异积分算子为核心的各类积分算子在函数空间的有界性研究成为现代调和分析中最为活跃的研究主题. 其中多参数奇异积分理论、Marcinkiewicz 积分算子理论、多线性奇异积分算子理论等都是其重要组成部分. 经过六十余年的研究已取得十分丰富的研究成果, 但仍有许多的本质问题有待进一步探讨. 本学位论文拟在这一领域就几个相关问题做些有益探索.

§ 1.1.1 沿低维集的粗糙核 Marcinkiewicz 积分算子

设 \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) 是 n -维欧氏空间, 其范数为 $|\cdot|$, 面积元为 dx . 设 $\alpha, J(\cdot), \{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ 和 (\mathbb{R}^n, ρ) 如第二章中定义. 设 Ω 是 S^{n-1} 上的可积函数且满足下面条件:

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(u) J(u) d\sigma(u) = 0; \quad (1.1.1)$$

$$\Omega(A_s x) = \Omega(x), \quad \forall s > 0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1.2)$$

对于 $d \geq 2$ 和适当的映射 $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, 定义 \mathbb{R}^d 上的抛物型 Marcinkiewicz 积分算子 \mathcal{M}_Ω^Φ 为

$$\mathcal{M}_\Omega^\Phi(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_{\rho(y) \leq t} \frac{\Omega(y)}{\rho(y)^{\alpha-1}} f(x - \Phi(y)) dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2},$$

其中 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (Schwartz 函数类). 当 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ 时, 我们用 μ_Ω^Φ 表示 \mathcal{M}_Ω^Φ . 如果 $n = d$, $\Phi(y) = y$, 算子 μ_Ω^Φ 回到了经典的 Marcinkiewicz 积分算子的情形, 记作 μ_Ω , 文 [86] 最先引入了算子 μ_Ω 的概念, 之后它引起了广泛的关注 (可参见 [21, 25, 37, 42, 93]). 特别地, Ding 等在文 [37] 中证明了若 $\Omega \in H^1(S^{n-1})$, 则对任意的 $1 < p < \infty$, μ_Ω 是 L^p 有界的. $H^1(S^{n-1})$ 表示单位球上的 Hardy 空间 (见 [30]). 随后, Chen 等在文 [25] 中指出对于任意的 $2\beta/(2\beta-1) < p < 2\beta$, 对于某个 $\beta > 1$, $\Omega \in \mathcal{F}_\beta(S^{n-1})$, μ_Ω 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的. 其中 $\mathcal{F}_\beta(S^{n-1})$ ($\beta > 0$) 定义为

$$\mathcal{F}_\beta(S^{n-1}) := \left\{ \Omega \in L^1(S^{n-1}) : \sup_{\xi \in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\Omega(y')| \left(\log \frac{1}{|\xi \cdot y'|} \right)^\beta d\sigma(y') < \infty \right\}.$$

Grafakos 和 Stefanov 在文献 [57] 中研究粗糙核奇异积分算子的 L^p 有界性时引入了上述函数类 $\mathcal{F}_\beta(S^{n-1})$. 随后, Al-Salman 等在文 [10] 中证明了对于任意的 $1 < p < \infty$, $\Omega \in L(\log^+ L)^{1/2}(S^{n-1})$, μ_Ω 是 L^p 有界的. 这里的 $L(\log^+ L)^\alpha(S^{n-1})$ ($\alpha > 0$) 表示满足条件 $\|\Omega\|_{L(\log^+ L)^\alpha(S^{n-1})} < \infty$ 的 $L^1(S^{n-1})$ 函数 Ω 的全体, 其中

$$\|\Omega\|_{L(\log^+ L)^\alpha(S^{n-1})} := \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log^\alpha(2 + |\Omega(\theta)|) d\sigma(\theta).$$

首先我们指出上述核函数类之间的关系:

$$L(\log^+ L)^{\alpha_1}(S^{n-1}) \subsetneq L(\log^+ L)^{\alpha_2}(S^{n-1}), \quad \forall 0 < \alpha_2 < \alpha_1; \quad (1.1.3)$$

$$\mathcal{F}_{\beta_1}(S^{n-1}) \subsetneq \mathcal{F}_{\beta_2}(S^{n-1}), \quad \forall 0 < \beta_2 < \beta_1; \quad (1.1.4)$$

$$\bigcap_{\beta > 1} \mathcal{F}_\beta(S^{n-1}) \not\subseteq H^1(S^{n-1}) \not\subseteq \bigcup_{\beta > 1} \mathcal{F}_\beta(S^{n-1}); \quad (1.1.5)$$

$$\bigcap_{\beta > 1} \mathcal{F}_\beta(S^{n-1}) \not\subseteq L \log^+ L(S^{n-1}); \quad (1.1.6)$$

$$L^q(S^{n-1}) \subsetneq L(\log^+ L)(S^{n-1}) \subsetneq H^1(S^{n-1}) \subsetneq L^1(S^{n-1}); \quad (1.1.7)$$

Degree papers are in the “[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)”.

Fulltexts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.